

Equações de Movimento em Modelos Solitônicos

Equations of Motion in Solitonic Models

Antonio Carlos Amaro de Faria Junior^{*ab}; Aulus Mattos Canone^b

^aMax Planck Institute for Gravitational Physics – Alemanha;

^bUniversidade Tecnológica Federal do Paraná. PR, Brasil.

*E-mail: atoni.carlos@gmail.com

Resumo

Neste artigo iremos descrever a dinâmica de soluções solitônicas a partir das equações de movimento provenientes da lagrangeana do sistema e de sua energia, mostrando a sua equivalência em termos de uma equação diferencial de primeira ordem. Esta investigação tem importância em modelos físicos e matemáticos e pode ser empregado no desenvolvimento de métodos analíticos e numéricos para a solução de equações diferenciais não lineares.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos. Solitons. Sistemas Não Lineares.

Abstract

In this paper we will describe the dynamics of solitonic solutions from the equations of motion from the lagrangean system and its energy, showing their equivalence in terms of a first order differential equation. This research is important in physical and mathematical models and can be used in the development of analytical and numerical methods for solving nonlinear differential equations.

Keywords: Dynamical Systems. Solitons. Nonlinear Systems.

1 Introdução

Solitons são soluções de equações diferenciais não lineares com diversas aplicações em modelos físicos e matemáticos (RAJARAMAN 1982). Na física de partículas os modelos de solitons têm especial aplicação devido a simetria que algumas densidades de Lagrangeana apresentam como ocorre no modelo de Higgs onde essa simetria desempenha um importante papel na geração da massa das partículas (REBBI; SOLIANI, 1984), (PARKS, 1969). Essas são também conhecidas como defeitos topológicos ou ainda vórtices. Os primeiros trabalhos foram desenvolvidos em 1973 por Nielsen e Olesen (NIELSEN, 1973) e a partir de 1990 estes modelos de vórtices foram aplicados em sistemas relativísticos e teorias de Gauge por vários autores como Jackiw e Weinberg (JACKIW; WEINBERG, 1990).

Neste trabalho analisamos a equivalência entre as equações de movimento provenientes da densidade de Lagrangeana que descreve tais defeitos topológicos e as equações de movimento provenientes da energia do sistema demonstrando que ambas equações de movimento se reduzem à uma equação diferencial de primeira ordem. Os modelos descritos neste trabalho estão no sistema natural de unidades ou seja em notação covariante onde o tensor métrico é dado por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

e

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2)$$

2 Desenvolvimento

2.1 Lagrangeana do Sistema

Os sistemas solitônicos são descritos pela densidade de lagrangeana do sistema

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (3)$$

onde ϕ é um campo escalar real. O primeiro termo na equação (3) representa a parte cinética e $V(\phi)$ é o potencial que descreve o modelo do sistema a ser investigado. Por outro lado a energia do sistema é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi), \quad (4)$$

É interessante notar que o estado de energia mínima na equação (4) será dado para um campo constante quando não há contribuição do termo cinético.

2.1.1 Um exemplo

Para ilustrar como podemos obter as equações de movimento para um modelo específico na equação (3) vamos escolher um modelo muito importante e muito estudado em Física de Partículas conhecido como modelo (HIGGS, 1964) [6]. Este modelo é importante na análise de espalhamento de partículas a partir do cálculo de diagramas de Feynman

de 4 pontos em análise perturbativa. O estudo deste modelo é importante porque esta teoria se mostrou renormalizável o que garante que os cálculos dos diagramas de Feynman correspondentes não serão divergentes (MURRAY, 1974). Este modelo é caracterizado pelo seguinte potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2, \quad (5)$$

onde λ é uma constante de acoplamento que está relacionada com a massa do campo. A equação de movimento para este modelo é dada por

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - 2\lambda^2 (\phi^2 - a^2)\phi = 0. \quad (6)$$

Podemos observar da equação (6) que se $\phi = \pm a$ então a equação de movimento descreve uma partícula livre. Entretanto para o caso em que $\phi \neq \pm a$ podemos, então, encontrar o estado fundamental minimizando o potencial (5)

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 2\lambda^2 (\phi^2 - a^2)\phi = 0. \quad (7)$$

Ao analisarmos a equação (7) verificamos que o potencial apresenta dois mínimos, e um máximo local para $\phi = 0$.

2.2 Equações de Movimento do Sistema

Para encontrarmos as equações de movimento do sistema utilizamos o procedimento padrão que consiste em minimizar a ação do sistema obtendo assim as equações de Euler-Lagrange. Podemos partir do modelo que descreve um campo escalar real que pode ser escrito como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (8)$$

e obtemos assim a equação de movimento

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (9)$$

Para melhor descrevermos o análise da equivalência entre as soluções do sistema advindas das equações de movimento e as soluções advindas da investigação da energia do sistema podemos considerar o sistema em $(1+1)$ dimensões de modo que podemos escrever (9) da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (10)$$

Podemos ainda considerar análise para configurações estáticas de (10) a partir de um *boost de Lorentz*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (11)$$

Um aspecto importante da dinâmica destes sistemas solitônicos é o fato de possuírem propriedades topológicas. Essas propriedades são muito interessantes pois podem ser relacionadas com as configurações estáticas das soluções das equações de movimento e com os valores máximos e mínimos do potencial. As propriedades topológicas do sistema podem ser descritas através da corrente

$$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (12)$$

Podemos observar que esta corrente obedece a equação

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (13)$$

para as configurações estáticas em que o potencial é um extremo. Neste caso podemos presumir a existência de uma carga escrita como

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx J^0 = \phi(+\infty) - \phi(-\infty) \quad (14)$$

que obedece portanto

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (15)$$

A dependência assintótica de Q pode ser analisada através dos valores do comportamento assintótico do campo. Se $\phi \neq \pm a$ terá um valor diferente de zero e para $\phi = \pm a$ a carga será nula.

2.3 Energia do Sistema

A energia do sistema (3) pode ser escrita da seguinte forma

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (16)$$

É interessante destacar que a energia dada pela equação (16) pode ser obtida ao se escrever

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \mp \sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right] dx. \quad (17)$$

Neste caso se pode ver da equação (17) que a energia mínima desta configuração será

$$E_m = \mp \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right] dx. \quad (18)$$

uma vez que se tenha a condição

$$\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} = 0. \quad (19)$$

O sistema descrito pela equação (17) foi originalmente proposto por Bogomol'nyi (BOGOMOL'NYI, 1976).

2.4 Equivalência das Equações de Movimento

A fim de demonstrarmos a equivalência entre as equações de movimento provenientes da lagrangeana do sistema (3) e as equações do movimento provenientes da energia do sistema (16) integramos a equação (10)

$$\int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \int \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (20)$$

obtendo assim

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = V(\phi), \quad (21)$$

resultando então em

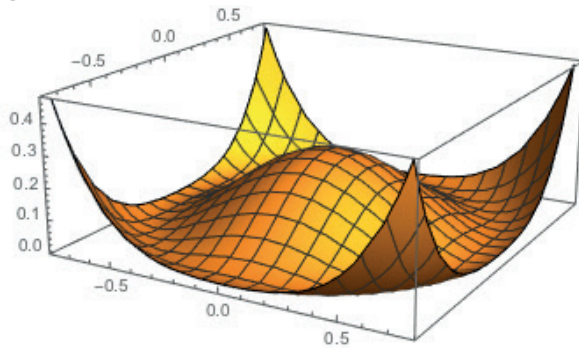
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \pm \sqrt{2V(\phi)}, \quad (22)$$

o que mostra finalmente a equivalência.

Como um exemplo de aplicação desta equivalência nós analisaremos um sistema de sólitons em $(1+1)$ dimensões conhecido como kinks que aparecem na teoria. Estes objetos têm muitas aplicações em física de partículas e em matéria condensada mais recentemente devido às suas propriedades topológicas, a estabilidade de suas soluções e o fato da energia do sistema ser finita. O modelo que descreve esta teoria é caracterizado pelo potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2. \quad (23)$$

Figura 1 - Modelo



Fonte: Os autores.

Pode-se obter a equação de movimento deste sistema a partir da equação (9)

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = -2\lambda^2 (\phi^2 - a^2) \phi. \quad (24)$$

Podemos considerar um *boost de Lorentz* e escrever (24) como

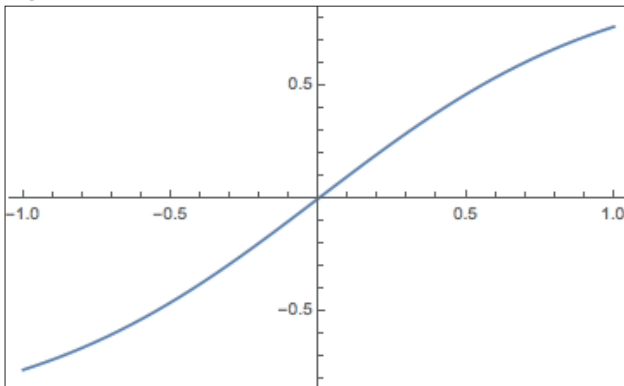
$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 2\lambda^2 (\phi^2 - a^2) \phi. \quad (25)$$

É interessante ressaltar neste ponto, para efeito de comparação, que a equação (25) é uma equação diferencial não linear de segunda ordem cujas soluções são dadas por

$$\phi(x) = \pm a \tanh \lambda a(x + x_0) \quad (26)$$

onde a é uma constante. O perfil da solução (26) é apresentado na figura (2).

Figura 2 - Perfil da solução



Fonte: Os autores.

A fim de mostrarmos a aplicação da equivalência entre as equações de movimento proveniente da densidade de lagrangeana do sistema e a equação diferencial de primeira ordem não linear proveniente da energia do sistema (ref) podemos substituir o modelo (23) na equação (19) obtendo assim a seguinte equação

$$\frac{d\phi}{dx} \pm \lambda(\phi^2 - a^2) = 0 \quad (27)$$

e ainda podemos escrever

$$\int \frac{d\phi}{\phi^2 - a^2} = \mp \int \lambda dx, \quad (28)$$

de forma que resolvendo esta equação diferencial obtemos

$$\phi(x) = \pm a \tanh \lambda a(x + x_0), \quad (29)$$

que é exatamente a equação (26). A energia mínima desta configuração conforme a equação (18) pode ser calculada de forma direta portanto

$$E = \mp \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lambda(\phi^2 - a^2) \frac{d\phi}{dx} \right] dx = \mp \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} [\lambda(\phi^2 - a^2)] d\phi \quad (30)$$

resultando no valor finito

$$E = \frac{4}{3} \lambda a^3. \quad (31)$$

É importante observar que a equação (27) é uma equação diferencial de primeira ordem diferentemente da equação (25) que é uma equação de segunda ordem, mas que permite, no entanto, que se obtenha a mesma solução (26) no que consiste a equivalência que abordamos.

3 Conclusão

Neste trabalho mostramos que sistemas dinâmicos não lineares conhecidos como sólitons ou defeitos topológicos ou ainda vórtices obedecem à uma equação de primeira ordem não linear proveniente da análise da energia do modelo. Esta equação diferencial de primeira ordem é equivalente às equações de movimento, que são equações diferenciais de segunda ordem e que são obtidas a partir da lagrangeana do sistema pela minimização da ação. Os sistemas que foram investigados são sistemas em dimensões e que por isso permitem uma redução na ordem da equação diferencial em coordenadas cartesianas. No entanto esta equivalência também pode ser estendida à sistemas em 3 dimensões considerando um sistema de coordenadas apropriado como coordenadas polares.

Este trabalho está em progresso. Esses sistemas simples em dimensões nos quais se aplica a redução de ordem das equações de movimento correspondentes são de muita importância no estudo de sistemas planares. Tal fato decorre da simplicidade pela qual fenômenos e propriedades físicas extremamente importantes serem descritas formalmente por uma equação diferencial de primeira ordem não linear nestes sistemas. Uma análise mais profunda desta equivalência sugere que a relação entre os diversos sistemas de coordenadas utilizados para descrever um modelo ou a possibilidade que os sistemas físicos da natureza possam ser investigados independentemente do seu conjunto de coordenadas, o que constitui em si uma simetria, pode esconder uma formalismo entre grandezas aparentemente distintas do sistema como a relação entre sua energia e sua densidade de lagrangeana e sua ação.

References

BOGOMOL'NYI, E.B. Bogomol'nyi explained. *Sov. J. Nucl. Phys.*, v.24, 1976.
 HIGGS, P.W. Search for a low mass neutral Higgs boson in Z^0 decay. *Phys. Lett.*, v.12 p.132, 1964.

JACKIW R; WEINBERG, E.J. "Quantum" chaos in billiards studied by microwave absorption. *Phys. Rev. Lett.*, v.64, p.2234, 1990. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.2215>

MURRAY, J. D. *Asymptotic analysis*. Oxford: Oxford University, 1974.

NIELSEN H. B; OLESEN, P. *Nucl. Phys. B*, v.61 p.45 1973.

PARKS, R. D. *Superconductivity*. New York: Dekker, 1969.

RAJARAMAN, R. *Solitons and instantons*. North-Holland, Amsterdam, 1982.

REBBI, C.; SOLIANI, G. *Solitons and particles*. Singapore: World Scientific, 1984.